Lecture 01: Probability Space

我们可以通过随机试验来研究随机现象。随机试验应当具有以下特点：

- 相同条件下可重复；
- 试验结果不唯一，试验前未知，但所有可能的结果已知；

概率空间是一个三元组 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$，其中 Ω 为样本空间，$\mathscr{F}$ 为可测事件集，P 为概率测度。

Sample Space

$\boxed{\text{Definition 1.1}}$ 随机试验的所有可能结果的集合称为**样本空间 (sample space)**，记作 Ω。每个随机试验的可能结果称为**样本点/基本事件 (sample point)**，记作 e 或 ω，$e \in \Omega$。

Measurable Event Set

$\boxed{\text{Definition 1.2.1}}$ 称 $\mathscr{F} \subseteq Pot(\Omega)$ 是集合 Ω 上的一个 **σ-域 (σ-field)**，当且仅当

- $\Omega \in \mathscr{F}$；
- 若 $A \in \mathscr{F}$，则 $A^C \in \mathscr{F}$；
- 若 $A_1, \cdots A_n \cdots \in \mathscr{F}$，则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$ (即可数个集合的并也是 $\mathscr{F}$ 的元素)。

$\boxed{\text{Definition 1.2.2}}$ **可测事件集** $\mathscr{F}$ 是 Ω 上的一个 σ-域，若 $A \subseteq \Omega$，$A \in \mathscr{F}$，则称 A 是一个**事件 (event)**。

Probability Metric

$\boxed{\text{Definition 1.3}}$ 集合函数 $P : \mathscr{F} \to [0, 1]$ 是 $(\Omega, \mathscr{F})$ 上的一个**概率测度 (probability metric)**，当且仅当

- $P(\Omega) = 1$；
- 对于任意 $A \in \mathscr{F}$，$P(A) \geq 0$；
- 满足可列可加性：对于互不相容的事件 $A_1, \cdots, A_n \cdots \in \mathscr{F}$，$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$ 。

以下是一系列有用的推论：

1. $P(\emptyset) = 0$。

 > Proof: 取 $A_1 = \Omega, A_2 = A_3 = \cdots = \emptyset$，那么
 >
 > $$P(\Omega) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = P(\Omega) + \sum_{n=2}^{\infty} P(\emptyset)$$
 >
 > 所以 $P(\emptyset) = 0$。■

2. 可列可加性可以推出有限可加性，即对于 $n \in \mathbb{N}$ ，$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$。

 > Proof: 取 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \emptyset$，则有
 >
 > $$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + \sum_{k=n+1}^{\infty} P(\emptyset) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$
 >
 > 有限可加性得证。■

3. $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$。

> Proof: 由 $A=(A-B)\cup(A\cap B)$ 和结论 2 易得。■

4. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。更一般地，

$$P(\bigcup_{k=1}^{n}A_k)=\sum_{i=1}^{n}\left((-1)^{i+1}\sum_{1\leq j_1<j_2<\cdots<j_i\leq n}P(\bigcap_{k=1}^{i}A_{j_i})\right)$$

(容斥原理的表达式)。