Lecture 02: Classical Probability and Geometric Probability

Classical Probability

古典概型的特点：

- $\Omega=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\},n\in\mathbb{N}$。
- 对于任意 $1\le i\le n$，$P(\{e_i\})=\frac{1}{n}$ (即每个样本点等可能)。

在此基础上，若 $A=\{e_{i_1},\cdots e_{i_k}\}$，则 $P(A)=\frac{k}{n}$。

Permutations and Combinations

- n 个可分辨的球选 r 个，可重复选，排列：n^r。
- n 个可分辨的球选 r 个，不可重复选，排列：$n^{\underline{r}}=\frac{n!}{(n-r)!}$。
- n 个可分辨的球选 r 个，不可重复选，组合：$\binom{n}{r}$。
- n 个可分辨的球选 r 个，可重复选，组合：$\binom{n+r-1}{r}$。

  > 考虑一个选择方案 $1\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_r\le n$，现设计另一个数列 y，满足 $y_1=x_1,y_2=x_2+1,y_3=x_3+2,\cdots,y_r=x_r+r-1$。那么 y 严格单调增，且 $1\le y_i\le n+r-1$。x 序列和 y 序列一一对应，因此 x 序列个数 = y 序列个数 = $\binom{n+r-1}{r}$。

【例】求 $(a+b+c)^n$ 合并同类项的展开式中有多少项。

> 解：相当于求形如 $a^{n_1}b^{n_2}c^{n_3},n_1+n_2+n_3=n$ 的个数。可以将其理解为从 3 个物品中选 n 个，可重复选的组合方案数，因此答案为 $\binom{n+2}{n}=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$。

有关组合数的一些性质：

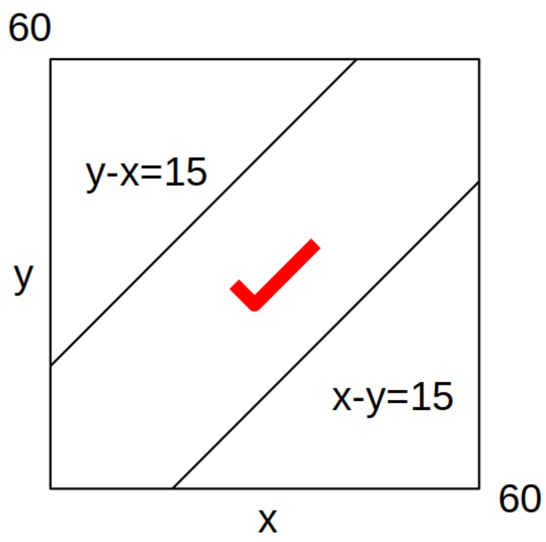
- $(1+x)^n=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}x^k$，令 $x=1$，可得 $\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}=2^n$。
- $(1+x)^{a+b}=(1+x)^a(1+x)^b$，因此 $\binom{a+b}{n}=\sum_{k=0}^a\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$。若取 $a=b=n$，则可以得到 $\binom{2n}{n}=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}^2$。

Geometric Probability

$\boxed{\text{Definition 2.1}}$ **(几何概型)** 若 Ω 中的样本点与一个有界区域 S 中的点一一对应，则事件 A 对应于 S 的一个子集 D。若 A 的概率只和 D 的测度有关，而与 D 的形状，位置无关，那么 $P(A)=\frac{D\text{的测度}}{S\text{的测度}}$。

【例】甲乙两人各在 1h 内随机一个时间点到达约会地点，先到的人最多等后到的人 15 分钟，求两人碰面的概率。

> 解：用数对 (x,y) 表示甲乙两人到达的时间，则两人可以碰面当且即当 $|x-y|\le 15$，画图：



> 因此碰面概率为 $\frac{60^2-45^2}{60^2}=\frac{7}{16}$。

【例】(蒲丰投针) 两平行线间距 a，向其投掷长度为 $l\ (l<a)$ 的针，使针的中点在两平行线之间，求针与两条平行线中任意一条相交的概率。

> 解：$l<a$ 保证了针至多只会和一条线相交，根据对称性，我们只考虑针与下面的线相交的情况。
>
> 设针的中点与线的距离为 x，针所在的直线与线的夹角为 θ，则针与线相交当且仅当 $x\le\frac{l}{2}\sin\theta$。我们以 x 和 θ 为坐标轴画出样本空间和相交事件：
>
> $$\Omega=\{(\theta,x)|0<\theta<\pi,0\le x\le\frac{a}{2}\}$$
> $$A=\{(\theta,x)|0\le\theta\le\pi,0\le x\le\frac{l}{2}\sin\theta\}$$
>
> A 的图像是一个正弦函数，要计算面积，只需要计算积分：
>
> $$P(A)=\frac{1}{\pi\cdot\frac{a}{2}}\int_0^\pi\frac{l}{2}\sin\theta d\theta=-\frac{l}{2}\cos\theta\Big|_0^\pi=\frac{2l}{a\pi}$$
>
> 这个方法可以用于估算 π 的值。通过大量重复试验用 $f_N(A)$ 来代替 $P(A)$ 后，$\pi=\frac{2l}{aP(A)}$。

【例】(贝特朗奇论) 在一个半径为 1 的圆中等概率地取一根弦，弦长 $l>\sqrt{3}$ 的概率是多少？

由于这里的“等概率”没有被严格地定义，因此可能有多种对等概率的解读，它们都是对的且会算出不同的结果：

1. 在圆周上固定一个点，然后另一个点在圆周上随机选取：$P(A)=\frac{1}{3}$。
2. 让一条直线从上往下均匀地扫一遍，发现只有中点距离圆心小于 $\frac{1}{2}$ 时弦长满足要求：$P(A)=\frac{1}{2}$。
3. 在圆内随机选取弦的中点，发现只有中点位于半径为 $\frac{1}{2}$ 的小圆内是弦长满足要求：$P(A)=\frac{1}{4}$。
4. ……