Lecture 04: Independence and Bernoulli Experiments

Independence

【例】a 个黑球，b 个白球，分别在有放回、无放回的情况下计算：

(1) 第一次摸到黑球 (A)，第二次摸到黑球的概率 (B)。

(2) 第二次摸到黑球的概率。

容易发现，有放回时，$P(B|A) = P(B)$ (放回后，第二次的实验条件与第一次的结果无关)，无放回时 $P(B|A) \neq P(B)$。

$\boxed{\text{Definition 4.1}}$ 称事件 A 和 B 互相独立，若 $P(AB) = P(A)P(B)$ (或者说，$P(B) = P(B|A)$)。

以下是一些推论：

- $\emptyset, \Omega$ 与任意事件独立。
- 若 A, B 独立，则 $\overline{A}, B$，$A, \overline{B}$，$\overline{A}, \overline{B}$ 也独立。

> Proof: 第一条：
> $P(\overline{A}B) = P(B - BA) = P(B) - P(BA) = P(B) - P(B)P(A) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P(\overline{A})$
> 容易推得第二，第三条也成立。■

注：事件独立和韦恩图上两个事件没有交集没有任何关系！

$\boxed{\text{Definition 4.2}}$ (三个事件的独立性) A, B, C 相互独立，若

- A, B, C 两两互相独立。
- $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$。

注：这两条并不能互相推出，以下是例子：

- (1) 推不出 (2)：一个正四面体，一面红色 (A)，一面绿色 (B)，一面蓝色 (C)，一面三个颜色都有，讨论向下面的颜色：
  - $P(A) = P(B) = P(C) = 2/4 = 1/2$，$P(AB) = 1/4 = P(A)P(B)$。
  - 然而 $P(ABC) = 1/4 \neq P(A)P(B)P(C)$。
- (2) 推不出 (1)：一个正八面体，1,2,3,4面有红色，1,2,3,5面有绿色，1,6,7,8面有蓝色。
  - $P(A) = P(B) = P(C) = 4/8 = 1/2$，$P(ABC) = 1/8 = P(A)P(B)P(C)$。
  - 然而 $P(AB) = 3/8 \neq P(A)P(B)$。

类似地可以定义 n 个事件的独立性：对于事件 $A_1, \cdots, A_n$，令 I 为指标集，则它们独立当且仅当对于任意 $S \subseteq I$，有 $P(\bigcap_{\alpha \in S} A_\alpha) = \prod_{\alpha \in S} P(A_\alpha)$。

$\boxed{\text{Theorem 4.3}}$ 若事件 $A_1, \cdots, A_n$ 互相独立，那么考虑事件集的任意一个划分，每个组里的事件做任意运算的结果与别组的结果也互相独立。

$\boxed{\text{Theorem 4.4}}$ 若 $A_1, \cdots, A_n$ 相互独立，则 $P(\bigcup_{k=1}^n A_k) = 1 - \prod_{k=1}^n P(\overline{A_k})$。

证明：$P(\bigcup_{k=1}^n A_k) = 1 - P(\overline{\bigcup_{k=1}^n A_k}) = 1 - P(\bigcap_{k=1}^n \overline{A_k}) = 1 - \prod_{k=1}^n P(\overline{A_k})$。■

Bernoulli Experiments

$\boxed{\text{Definition 4.5}}$ 若一个独立重复试验满足

- 每个事件只有两个结果：A 和 $\overline{A}$，$P(A) = p, P(\overline{(A)}) = 1 - p$。
- 试验可重复，每两次试验之间互相独立。

则 n 次上述实验称为 n 重伯努利试验 (Bernoulli Experiment)。

$\boxed{\text{Theorem 4.6}}$ 伯努利试验中，记 $P_n(k)$ 为 A 发生 k 次的概率，则 $P_n(k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$。

【例】(简单随机游走 simple random walk) 一个粒子从0出发在整数数轴上运动，每次向右移动的概率为 p，求跳 n 次后位于 k 的概率。

> 解：以下只讨论 $k\geq 0$ 的情况：
>
> $$P(n,k)=\begin{cases}0 & ,k>n\\ 0 & ,n\text{与}k\text{奇偶性不同}\\ \binom{n}{(n+k)/2}p^{(n+k)/2}(1-p)^{(n-k)/2} & ,\ otherwise\end{cases}$$

$\boxed{\text{Theorem 4.7}}$ (泊松定理, Poisson) 若 $np_n=\lambda$，则对于固定的 k，

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

证明：

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}(\frac{\lambda}{n})^k(1-\frac{\lambda}{n})^{n-k}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\cdot 1(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})(1-\frac{\lambda}{n})^n(1-\frac{\lambda}{n})^{-k}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\lambda^k}{k!}(1-\frac{\lambda}{n})^n\\&=\frac{\lambda^k}{k!}\left[\lim_{n\to\infty}(1+\frac{-\lambda}{n})^{\frac{n}{-\lambda}}\right]^{-\lambda}\\&=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\end{aligned}$$