Lecture 09: 2-Dimensional Continuous Random Variable

Examples of Discrete 2-D Random Variable

【例】(三项分布) 若二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律为

$$P(X=i,Y=j)=\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!}p_1^ip_2^j(1-p_1-p_2)^{n-i-j}$$

其中 $i,j=0,1,\cdots,n,i+j\le n,0\le p_1,p_2,p_1+p_2\le 1$，则称 (X,Y) 服从参数 n,p_1,p_2 的三项分布。

概率背景：在 n 重独立重复试验中，每次试验有三种可能的结果 A_1,A_2,A_3，$P(A_1)=p_1,P(A_2)=p_2$。令 A_1 发生次数为 X，A_2 发生次数为 Y，则 (X,Y) 服从上述三项分布。

三项分布的边缘分布是二次分布，因为在计算 $P(X=k)$ 时，我们不关心在没有命中 A_1 时命中的是 A_2 还是 A_3，相当于只剩下了两种事件。我们也可以从代数上进行验证：

$$\begin{aligned}
P(X=k)=P(X=k,0\le Y\le n-k)&=\sum_{i=0}^{n-k}P(X=k,Y=i)\\
&=\sum_{i=0}^{n-k}\frac{n!}{k!i!(n-k-i)!}p_1^kp_2^i(1-p_1-p_2)^{n-k-i}\\
&=\frac{n!}{k!(n-k)!}p_1^k\sum_{i=0}^{n-k}\frac{(n-k)!}{i!(n-k-i)!}p_2^i(1-p_1-p_2)^{n-k-i}\\
&=\frac{n!}{k!(n-k)!}p_1^k(p_2+(1-p_1-p_2))^{n-k}\\
&=\binom{n}{k}p_1^k(1-p_1)^{n-k}
\end{aligned}$$

一般地，可以定义 k 项分布。记 $P(A_1)=p_1,\cdots,P(A_k)=p_k$，$0\le p_1,\cdots,p_k,\sum_{i=1}^k p_i\le 1$，记 X_j是 n 次试验中 A_j 发生的次数，则 $(X_1,\cdots,X_k)$ 的分布律为

$$P(X_1=j_1,\cdots,X_k=j_k)=\frac{n!}{j_1!\cdots j_k!}p_1^{j_1}\cdots p_k^{j_k}$$

其中 $0\le j_1,\cdots,j_k\le n,\sum_{i=1}^k j_i=n$。

【例】(二维超几何分布) 若二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律为

$$P(X=n_1,Y=n_2)=\frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{n_2}\binom{N_3}{n_3}}{\binom{N}{n}}$$

其中 $0\le n_1\le N_1,0\le n_2\le N_2,0\le n_3\le N_4,n_1+n_2+n_3=n,N_1+N_2+N_3=N$，则称 (X,Y) 服从二维超几何分布。

概率背景：设 N 个物品分为三类，各有 N_1,N_2,N_3 个，不放回地挑 n 个，第一类抽到 X 个，第二类抽到 Y 个，则 (X,Y) 服从上述二维超几何分布。

类似地，二维超几何分布的边缘分布是一维的超几何分布：

$$
\begin{aligned}
P(X=n_1) &= P(X=n_1, 0 \le Y \le \min\{N_2, n-n_1\}) \\
&= \sum_{k=0}^{\min\{N_2,n-n_1\}} \frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N_2}{k}\binom{N_3}{n-n_1-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= \frac{\binom{N_1}{n_1}}{\binom{N}{n}} \left(\sum_{k=0}^{\min\{N_2,n-n_1\}} \binom{N_2}{k}\binom{N_3}{n-n_1-k} \right) \\
&= \frac{\binom{N_1}{n_1}}{\binom{N}{n}} \binom{N_2+N_3}{n-n_1} \\
&= \frac{\binom{N_1}{n_1}\binom{N-N_1}{n-n_1}}{\binom{N}{n}} \qquad \text{(一维超几何分布)}
\end{aligned}
$$

2-Dimensional Continuous Random Variable

$\boxed{\text{Definition 9.1}}$ 对于一个二维随机变量 (X,Y) 的分布函数 $F(x,y)$，若存在非负可积函数 $p(x,y)$，使得对于任意 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$，有

$$
F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dudv
$$

则称 (X,Y) 是**二维连续型随机变量**，称 $p(x,y)$ 是 (X,Y) 的 (联合) 概率密度函数。

$p(x,y)$ 的性质：

- $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, p(x,y)\ge 0$
- $$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}p(x,y)dxdy=F(+\infty,+\infty)=1$$
- 设 $D\subseteq\mathbb{R}^2$，则 (X,Y) 落入 D 中的概率为

  $$
  P((X,Y)\in D)=\iint_D p(x,y)dxdy
  $$

- 若 $p(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 附近连续，则有

  $$
  \left.\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}\right|_{(x,y=(x_0,y_0))}=p(x_0,y_0)
  $$

  注：和一维的情形类似，在二维连续型随机变量中，$p(x_0,y_0)$ 不能理解为 $x=x_0,y=y_0$ 的概率。事实上，$\forall x_0,y_0\in\mathbb{R},P(X=x_0,Y=y_0)=0$。$p(x_0,y_0)$ 只能理解为 (X,Y) 落入 (x_0,y_0) 附近一小块面积的概率的近似值，即

  $$
  \int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\int_{y_0}^{y_0+\Delta y}p(x,y)dxdy\approx p(x_0,y_0)\Delta x\Delta y
  $$

边缘分布和密度函数的求法：

X 的边缘分布函数为

$$
F_X(x)=F(X,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}p(u,y)dy\right]du
$$

X 的边缘密度函数为

$$
p_X(x)=\frac{d}{dx}F_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)dy
$$

(直观地想，离散时边缘密度的求法是固定 x，对所有可能的 y 求和，那么在连续型中将求和换作积分即可。)

Y 的边缘分布和密度函数求法类似。

关于独立性：对于一般的二维随机变量，X,Y 的独立性定义为

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

在连续的情形中，即

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p(u,v)dudv=\int_{-\infty}^{x}p_X(u)du\int_{-\infty}^{y}p_Y(v)dv=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}p_X(u)p_Y(v)dudv$$

因为上式对于任意 x,y 均成立，所以独立性条件可以用密度函数直接表示为

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, p(x,y)=p_X(x)p_Y(y)$$

n-Dimensional Continuous Random Variable

$\boxed{\text{Definition 9.2}}$ 设 n 维随机变量 $(X_1,\cdots,X_n)$ 的分布函数为 $F(x_1,\cdots,x_n)$，若存在非负可积函数 $p(x_1,\cdots,x_n)$ 使得

$$\forall(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n, F(x_1,\cdots,x_n)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_n}p(u_1,\cdots,u_n)du_1\cdots du_n$$

则称 $(X_1,\cdots,X_n)$ 为 n 维连续型随机变量，$p(x_1,\cdots,x_n)$ 为 (联合) 概率密度函数。

Examples of 2-D Continuous Random Variable

【例】(二维均匀分布) 设 $D\subset\mathbb{R}^2$ 为有界区域，面积为 S_D。若 (X,Y) 的联合密度函数为

$$p(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D} & ,(X,Y)\in D\\ 0 & ,(X,Y)\in D\end{cases}$$

则称 (X,Y) 服从区域 D 上的二维均匀分布。

(注：事实上该定义和一维情况相同，一维情况的测度是长度，二维情况的测度是面积。)

该分布的均匀性体现在：对于任意 $A\subseteq D$，若 A 的面积为 S_A，则 $P((X,Y)\in A)=\frac{S_A}{S_D}$，与 A 的形状、位置无关，只与 A 的面积有关 (类比二维几何概型)。